ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОЦЕНКА НА ВОДНИЯ РЕСУРС – ПРИТОКА В ЯЗОВИРА

1. Оценка на разполагаемия воден ресурс в язовира, представен чрез месечни редици на притока

1. 1. Цел и видове оценки

Определянето на водния ресурс в язовира се състои в представяне на притока в него чрез редици на месечните обеми в продължение на задоволително дълъг многогодишен период. Само чрез този начин на представяне може да се съставят водностопански баланси за определяне на:

- необходимите полезни обеми в язовира за регулиране на неравномерността на притока за задоволяване на различните групи водоползватели с исканата от тях обезпеченост или
- може да се определи обезпечеността на водоползвателите при максималния възможен полезен обем на язовира.

Първия случай е валиден когато фактическият полезен обем на язовира е по-голям от необходимия за задоволяване на водоползвателите с необходимата им обезпеченост, а втория – когато това условие не е налице.

Важен е източникът на информация за ресурса. Настоящата методика предимно се отнася за язовирите в експлоатация в България от няколко десетилетия. При тях като най-точен и обективен източник на информация могат да се считат данните от баланса на язовира. Такива се водят редовно от самото начало на експлоатация на язовирите, които са обект на настоящата методика. Всякакви други начини за определяне на притока като имитационно моделиране на водоразпределението в поречието до язовира или данни от измерен отток във водочетна станция в близост до него са по-неточни. Следователно като основен източник за определяне на водния ресурс ще се считат данните от баланса между притока и разхода в язовира.

Получените въз основа на баланса многогодишни редици на месечния приток, за да са представителни по отношение на статистическите си оценки, трябва да са достатъчно дълги. Оценката на това качество на редицата се извършва по методите на статистиката, описана в разработената за МОСВ през 2004 г. в ИВП-БАН от д-р Игор Няголов «Методика за разпределение на водите на язовирите» и изложена тук накратко.

Друго важно изискване е наличие на еднородност на редицата. Това изискване се поставя, защото в повечето случаи притокът в язовира е нарушен. Важен е, обаче, размерът и начинът на нарушение. Незначителните нарушения причинени от малки водовземания и отклонения на води във водосбора могат да се пренебрегнат по преценка. Водовземания, които не нарушават съществено режима на отока, като малки ВЕЦ и ВЕЦ-ове на течащи води с дневни изравнители например, и връщат отнетите води обратно в реката, също могат да се пренебрегнат. Такива, които нарушават режима, но това става по систематичен, ежегодно повтаряем начин през почти целия приет период за съставяне на редицата, също няма да пречат за използването ѝ за хидроложка основа на баланса. Такъв например е притока от ВЕЦ «Бързия» в яз. «Среченска бара».

Нарушения, които не могат да се пренебрегнат и правят данните от баланса на язовира непригоден за хидроложка основа на воднобалансовите изчисления са значителни такива с несистемен характер, които отклоняват водите от водосбора. Такива са наличие на отклонения на значителни спрямо общия приток във водохранилището обеми във водосбора над него, които са започнали да стават след някакъв момент или са станали до някакъв момент от периода. Те могат съществено да нарушат еднородността на редицата. В такива случаи трябва да се търсят начини за възстановяване на тези нарушения ако са престанали или да се вмъкнат като нарушения и в частта от периода преди момента на извършването им. Трябва да се преценява във всеки конкретен случай внимателно годността на редиците получени от баланса на язовира и да се търсят начини за използването им, защото всички останали начини са по-необективни.

В краен случай може да се прибегне към моделиране на разпределението на ненарушения отток в басейна над язовира въз основа на схемата за използване на водите, т.е. съставяне на водностопански баланс на тази част от басейна. То, обаче, се основава на приемане на различни опции на водоползване, с различна вероятност на реализация в прогнозния период. Въобще определянето на притока в язовира за бъдещ период, при съществено му нарушаване във водосбора над него, много усложнява решението, защото внася допълнителна несигурност относно реализацията му в бъдеще. Трябва, обаче, да се отбележи, че случаи на два или повече последователно разположени язовира по протежение на една река, с изключение на енергийните каскади, са много малко в България. Каскадните енергийни язовири работят със сравнително постоянен месечен график, връщат водите в по-долния язовир и техните нарушения на притока не би трябвало да нарушават хомогенността на редицата на притока в разглеждания язовир.

Предвид на гореизложеното необходимата хидроложка редица на притока в язовира, която може да се нарече базова хидроложка редица (БХР), се съставя на основата на многогодишната редица на наблюдавания месечен приток в язовира, отбелязан в баланса между притока и разхода.

От БХР за яз.Тополница в периода 1970-2010г. се получават месечните водни обеми за същия период време (табл.1).

За годишната редица от тази таблица трябва да се направят следните оценки:

1. Оценка за представителност на редицата - достатъчна дължина, респективно за точност на средногодишния приток (норма на оттока) и оценка за хомогенност (еднородност) за индикиране на наличето на съществени нарушения;
2. Оценка на тренда през целия период и изменението му през последните 10-20 години с оглед оценка на влиянието на климатичните изменения за да се прецени дали да се ползва цялата редица или само част от нея.
3. Оценка на статистиките на редицата – стандартно отклонение, коефициенти на вариация и асиметрия на годишния и месечния приток.
4. Построяване на емпиричната и теоретичната крива на обезпечеността на годишния приток.
5. Генериране на синтетична редица чрез някой стохастичен модел като възможност за по-добро представяне на вариацията на притока.

По-нататък са описани методите за извършване на тези оценки като тяхното приложение е показано за данните от баланса на язовир «Тополница».

Таблица 1

Месечните водни обеми при яз.Тополница, $м^3.10^6$

месец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	год.
1970	23,708	35,372	55,877	37,066	37,057	23,062	21,203	4,622	3,396	7,439	7,128	6,074	262,004
1971	7,292	8,839	42,085	37,463	22,611	23,682	12,734	8,372	7,785	7,888	8,450	7,672	194,874
1972	7,327	12,701	18,075	9,953	18,524	10,734	9,158	7,292	17,116	7,327	27,639	18,991	164,837
1973	31,968	44,928	56,955	123,759	47,883	33,480	11,543	3,067	6,618	7,370	7,448	12,623	387,642
1974	13,401	20,114	30,015	20,866	40,504	26,300	5,184	2,776	2,480	5,521	9,210	22,844	199,215
1975	15,077	9,634	28,469	17,375	42,630	36,452	46,293	21,902	8,571	9,616	10,143	10,809	256,971
1976	8,571	12,105	12,053	35,562	46,932	54,156	30,041	49,948	15,025	26,171	54,380	39,813	384,756
1977	22,516	59,962	45,222	23,328	14,161	36,469	20,641	4,743	7,709	7,119	7,059	9,539	258,468
1978	16,390	24,377	34,914	49,136	20,045	24,296	11,521	2,316	9,884	8,830	7,551	16,390	225,649
1979	19,794	29,238	14,360	27,700	38,759	14,524	9,055	19,103	7,318	16,718	17,833	14,170	228,571
1980	15,120	27,743	33,247	47,598	110,748	43,140	3,974	5,041	4,320	10,057	9,271	12,882	323,140
1981	9,893	15,379	54,985	21,626	56,264	12,200	6,307	4,447	6,152	8,430	11,664	11,880	219,226
1982	11,526	9,029	45,438	49,170	39,105	9,634	5,011	7,940	7,024	8,796	7,681	13,159	213,512
1983	11,750	15,751	19,691	12,969	7,906	53,006	43,960	6,233	5,573	6,869	7,344	10,256	201,307
1984	8,986	18,317	44,781	47,019	25,479	8,294	5,288	4,493	4,501	6,990	7,344	7,197	188,689
1985	8,009	7,344	12,511	21,462	30,257	13,159	3,577	2,765	2,730	4,294	11,560	6,972	124,641
1986	9,383	33,912	62,312	24,607	9,392	15,345	13,204	3,491	2,451	6,091	5,357	5,175	190,718
1987	6,497	13,772	12,001	55,884	19,682	8,149	6,043	2,316	2,946	6,359	8,912	12,459	155,019
1988	9,504	14,420	36,988	41,662	26,179	44,885	7,839	5,694	5,340	6,290	8,303	13,720	220,824
1989	8,614	7,154	10,014	9,513	14,956	18,325	8,804	2,955	5,711	7,085	7,759	6,852	107,741
1990	7,638	8,243	7,733	13,556	23,147	7,016	2,341	2,177	2,290	2,445	3,335	11,379	91,299
1991	7,646	8,217	20,114	36,893	34,263	32,128	36,115	13,176	9,841	10,195	7,638	7,275	223,500
1992	6,921	8,839	18,619	52,868	18,248	47,563	26,266	8,035	6,117	8,104	6,454	7,214	215,248
1993	6,540	5,219	8,571	9,668	13,668	6,385	2,048	1,400	2,004	2,825	4,441	5,754	68,524
1994	5,374	5,797	6,178	10,204	12,753	3,482	3,145	2,480	2,333	4,614	5,590	6,299	68,247
1995	7,724	12,623	14,308	32,193	40,997	20,114	19,457	4,078	3,093	5,435	8,027	16,813	184,861
1996	21,678	30,292	28,313	62,787	32,400	7,137	3,145	4,026	6,428	9,556	7,707	23,725	237,194
1997	20,684	7,957	9,867	35,251	28,305	14,541	4,484	7,188	3,836	4,510	5,417	11,076	153,118
1998	14,757	49,568	32,219	14,040	20,632	16,209	8,752	3,318	5,236	8,934	6,618	9,824	190,106
1999	9,340	12,588	46,751	32,694	23,432	15,241	10,956	8,476	6,005	5,046	5,849	9,901	186,278
2000	12,018	22,836	30,957	37,755	30,358	5,776	3,283	1,914	2,288	5,094	4,882	5,497	162,657
2001	4,234	4,022	7,595	8,243	14,368	7,413	6,471	1,866	1,553	2,100	4,519	3,845	66,228
2002	5,244	5,979	16,070	24,348	19,768	4,482	5,028	20,218	11,292	30,879	20,028	38,705	202,043
2003	45,533	21,807	19,008	39,303	35,424	29,264	4,242	3,836	1,296	4,372	6,670	9,616	220,372
2004	13,781	16,485	20,053	12,640	10,472	21,175	8,977	8,977	4,717	5,003	6,439	7,983	136,702
2005	11,327	12,735	27,095	29,004	63,063	84,443	51,062	207,481	46,181	47,477	17,721	37,096	634,686
2006	62,744	54,959	165,370	114,411	52,298	38,388	38,232	10,774	7,163	8,778	8,580	9,558	571,253
2007	10,728	20,732	23,902	23,005	28,954	56,007	10,297	12,915	7,491	15,108	62,258	36,461	307,858
2008	30,086	29,259	27,997	61,262	23,935	21,623	5,446	1,497	3,034	6,420	5,437	8,485	224,481
2009	20,539	25,551	35,063	33,51	20,416	7,314	14,718	7,627	3,187	5,935	5,593	8,326	187,779
2010	9,545	23,352	40,231	61,734	25,466	21,802	29,881	14,459	3,576	8,935	9,776	15,993	264,750

1. 2 Оценка за представителността на редицата

Представителността на хидроложките редици се установява чрез [1]:

- Установяване на еднородността на хидроложките редици, т.е. принадлежността на членовете на редицата към една генерална съвкупност;
- Оценка на представителността на хидроложките редици от гледище на точността на оценките на статистическите им параметри.

Установяване на представителността на хидроложките редици от гледище на еднородността им

Проверка за наличие на нарушение на еднородността на годишните редици от водни обеми се прави при съмнение за нарушението на естествения режим на притока, вследствие на хидротехнически, агромелиоративни и други мероприятия. Тогава редицата се разделя на две части X и Y, съответно с дължина n_X и n_Y, като втората започва от годината, когато е настъпило нарушението.

За количествена оценка на еднородността на членовете на двете хидроложки редици е използван един от най-строгите непараметрични критерии – критерият на Уилкоксон. Предимството при него е, че не се изисква предварително познаване на типа и параметрите на съответната функция на разпределение на вероятностите.

В основата на критерия стои отхвърлянето или не на нулевата хипотеза „H_O". Според нулевата хипотеза сравняваните частични съвкупности X и Y на редицата принадлежат към една обща генерална съвкупност, т.е. различията между тях имат случаен, а не систематичен характер. Видът на различията (случайни или съществени) се установява чрез степента на значимост **α.** Степента на значимост се приема и зависи от отговорността на поставената задача. В практиката обикновено се изискват степени на значимост от 0,01 до 0,05. С намаляване степента на значимост намалява вероятността да се отхвърли една вярна хипотеза и да се допусне грешна [2].

Оценка по критерия на Уилкоксон

За аргумент на различието при този критерий се използва броят на инверсиите. Последните се получават при подреждането на двете извадки (X, Y) от разглежданата редица в един общ възходящ ред: **y y x y x x y x** …

Тогава за всяка стойност на извадката X, която се предшества за U на брой стойности на извадката Y, се казва, че са получени U инверсии. В случая в примера сумата от тези инверсии за всичките членове на редицата X се определят: $U_X = 2+3+3+4=12$. Аналогично: $U_Y = 1+3+4=8$. Накрая $U = \min(U_x, U_y) = 8$.

При дълги редици с **n > 20** члена (**n**=**n$_X$**+**n$_Y$**) и **n$_X$, n$_Y$ > 4** броят на инверсиите се разпределя приблизително по нормален закон на разпределение със средна стойност:

$$\overline{U} = \frac{1}{2} n_x . n_y \tag{1}$$

и дисперсия:

$$\sigma_U^2 = \frac{n_X . n_Y}{12}(n_X + n_Y + 1) \tag{2}$$

Пресмятането на инверсиите се затруднява, когато редиците са много дълги. За намаляване на трудоемкостта се използва следната формула за сумарния брой инверсии:

$$\begin{cases} U_y = \sum\limits_1^{n_y} r_y - \frac{1}{2}(n_y+1).n_y \\ U_x = \sum\limits_1^{n_x} r_x - \frac{1}{2}(n_x+1).n_x \end{cases} \tag{3}$$

където r_y е поредният номер на членовете на извадката **Y** в общата редица и съответно r_x е поредният номер на членовете на извадката **X** в общата редица.

При **n > 20** граничните значения за U при избрани степени на значимост **α = 0,05** и **0,01** се получават по формулите:

$$U_{0,05} = \overline{U} + Z_{0,05}\sigma_U \tag{4}$$

$$U_{0,01} = \overline{U} + Z_{0,01}\sigma_U$$

(5)

където $Z_{0,05}$ и $Z_{0,01}$ са нормираните нормални отклонения(отчитат се от [2], табл.II), а σ е стандартното отклонение, получено чрез ур.(2).

$Z_{0,05}$ =1,96 при α = 0,05

(6)

$Z_{0,01}$ =2,58 при α = 0,01

(7)

Ако $U \leq U_{0,05}$, то хипотезата „H_O" не се отхвърля.

Ако $U_{0,05} < U \leq U_{0,01}$, то хипотезата „H_O" е съмнителна.

Ако $U > U_{0,01}$, то хипотезата „H_O" се отхвърля.

При разделяне на годишната редица от табл.1 на две приблизително еднакви извадки от 19 и 22 години са получени следните резултати по критерия на Уилкоксон:

Броят на инверсиите е U = 264, а граничната стойност е U(0,05)= 283,97.

Тъй като е удовлетворено условието $U < U_{0,05}$, че за разглежданата редица от 41 години, хипотезата „H_o" не се отхвърля, т.е. редицата може да се приеме за еднородна с вероятност 95%.

Установяване на представителността хидроложките редици по отношение на дължината им

За представителността на хидроложките редици по отношение на дължината им. може да се съди по точността на получените оценки за техните статистически параметри., т.е. по вероятните отклонения на статистиките **x** (изчислени на базата на извадката от наблюдаваните данни) от реалните стойности x_0 на параметрите (съответстващи на генералната съвкупност).

В практиката тези отклонения $|x - x_0|$ се изразяват чрез стандартната грешка $\varepsilon_{x,\beta}$, която отразява вероятното отклонение на дадена статистика (средно аритметично, коефициент на вариация и др.) от реалната й стойност.

$$P\{|x - x_0| < \varepsilon_{x,\beta}\} = \beta$$

(8)

Вероятността β се нарича доверителна вероятност. Разликата $\alpha = 1 - \beta$ се нарича степен на значимост α .

Или, доверителната вероятност за параметъра $\overline{x}_o$ на средното аритметично със изчислена средно аритметично на извадката $\overline{x}$ има вида:

$$P\{|\overline{x} - \overline{x}_o| < \varepsilon_{\overline{x},\beta}\} = \beta$$

При нормално разпределение на вероятностите на членовете на хидроложката редица, грешките $\varepsilon_{\overline{x},\beta}$ на оценките на изборните параметри, са:

$$\varepsilon_{\overline{x},\beta} = \sigma_{\overline{x}} . t_\beta$$

(9)

където $\sigma_{\bar{x}}$ е стандартната грешка на статистиката, а t_β е нормираното нормално отклонение, съответстващо на зададена доверителна вероятност:

$$t_\beta = 1{,}00 \quad \text{при } \beta \approx 68\% \;;$$
$$t_\beta = 1{,}64 \quad \text{при } \beta \approx 95\% \;; \qquad (10)$$
$$t_\beta = 2{,}33 \quad \text{при } \beta \approx 99\% \;.$$

Стандартните грешки $\sigma_{\bar{x},\beta}$ и $\sigma_{C_V,\beta}$ при определяне на $\bar{x}$ и C_V при трипараметрично гама-разпределение се определят по метода на максимално правдоподобие със следните формули:

$$\sigma_{\bar{x},\beta} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (11)$$

$$\sigma_{C_V,\beta} = \frac{C_V}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{3}{3+C_V^2}} \qquad (12)$$

Стандартните грешки $\sigma_{\bar{x},\beta}$ и $\sigma_{C_V,\beta}$ при определяне на $\bar{x}$ и C_V при трипараметрично логнормално разпределение на статистиките се определят по метода на максимално правдоподобие със следните формули:

$$\sigma_{\bar{x},\beta} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (11^*)$$

$$\sigma_{C_V,\beta} = \frac{1+C_V^2}{\sqrt{2n}}.\frac{\ln(1+C_V^2)}{C_V} \qquad (12^*)$$

По нормативите, приети у нас, трябва да е изпълнено:

$$\frac{\sigma_{\bar{x},\beta}}{\bar{x}}.100\% < 10\% \qquad (13)$$

$$\frac{\sigma_{C_V,\beta}}{C_V}.100\% < 20\% \qquad (14)$$

Точността на оценката на параметрите на хидроложките редици и тяхната представителност се затруднява от краткосрочността на наблюденията. Във връзка с това дължината на хидроложките редици е основен въпрос, чийто отговор, от гледна точка на математическата статистика е намерен, чрез преобразуване на формулите за стандартните грешки на параметрите.

От формулата (11) за стандартната грешка на средното значение се получава :

$$\frac{\sigma_{\bar{x},\beta}}{\bar{X}}.100 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\frac{100}{\bar{X}} = \frac{Cv.\bar{X}}{\sqrt{n}}.\frac{100}{\bar{X}}, \qquad (15)$$

или относителна стандартна грешка (с зададена вероятност β) за нормата на оттока е:

$$10\% > \sigma_{\bar{x},\beta} = \frac{C_V.100}{\sqrt{n}}\%, \qquad (16)$$

Т.е. може да се получи необходимото число години на наблюдения за получаване нормата на оттока със точността, зададена по норматив:

$$n > C_v^2.100 \qquad (17)$$

Статистиките на наличната 41 годишна редица от обеми за яз.Тополница, оценени по метода на моментите, са дадени в табл.2:

Таблица 2

Средно значение	Стандартно отклонение	Коефициент на вариация	Коефициент на асиметрия
$\bar{x}$	σ	C_V	C_S
222,073	113,314	0,510	1,913

Стандартните грешки $\sigma_{\bar{x},\beta}$ и $\sigma_{C_V,\beta}$ при определяне на $\bar{x}$ и C_V за трипараметрично логнормално разпределение и трипараметрично гама-разпределение на статистиките се определят по метода на максимално правдоподобие при доверителна вероятност $\beta = 68\%$.

Резултатите от изчислените стандартни грешки и необходимия минимален брой години за получаване норма на оттока със 68% обезпеченост са дадени в табл.3:

Таблица 3

Теоретично разпределение	$\sigma_{\bar{x},\beta}$ $m^3.10^6$	$\frac{\sigma_{\bar{x},\beta}}{\bar{x}}$ %	$\sigma_{C_V,\beta}$ $m^3.10^6$	$\frac{\sigma_{C_V,\beta}}{C_V}$ %	Минимален брой години
Гама 3-параметрично	17,7	8,0	0,05	10,59	23
Логнормално 3-параметрично	17,7	8,0	0,06	12,4	23

Анализът на табл.4 показва, че изчислените стандартни грешки са по-малки от съответните им допустими стойности $\frac{\sigma_{\bar{x},\beta}}{\bar{x}} < 10\%$ и $\frac{\sigma_{C_V,\beta}}{C_V} < 20\%$ и следователно редиците са представителни по отношение на исканата точност на оценките на параметрите.

Определяне тренда на годишните хидроложки редици

През последните десетилетия в хидрологията се отделя много внимание на количествените оценки на наблюдаваните промени във водните ресурси, свързвани с измененията в климата.

Главното средство за разбирането на потенциалните бъдещи промени във водните количества в резултат на атмосферната активност, е определянето на тренда на хидроложките данни върху изминал период, като за оценяване степента на значимост на този тренд се прилага статистически тест.

Трендът е представен от права линия, апроксимираща хидроложките данни във времето. За изчисляване на уравнението на правата линия:

$$x = b.t + a$$

се използва методът на най-малките квадрати, а именно:

$$b = \frac{n\sum_{1}^{n} x_i t_i - \left(\sum_{1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{1}^{n} t_i\right)}{n\sum_{1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{1}^{n} t_i\right)^2} \qquad (19)$$

$$a = \frac{\sum_{1}^{n} x_i - b\sum_{1}^{n} t_i}{n} = \bar{x} - b.\bar{t} \qquad (20)$$

Изследването върху значимостта на изменението тренда е проведено с помощта на статистическия Ман-Кедал(МК) тест.

Mann-Kendall(МК) тест

Това е непараметричен тест използван за откриване на значими трендове във времеви редици и е подходящ за прилагане при хидроложки наблюдения. МК тестът се базира на корелацията между ранговете на членовете от хидроложката редица[5].

Редицата с дължина n от стойности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ се замества от редицата на относителните им рангове (R_1, R_2, R_3,….., R_n).

В математическата статистика рангирането е трансформация, при която изходните данни се заместват с техния ранг, след като данните са били сортирани във възходящ ред. Например, числовите данни **3.4, 5.1, 2.6, 7.3** от наблюденията се заместват с реда от техните рангове **2, 3, 1** и **4** съответно, след като данните са били сортирани.

Статистическият тест се задава чрез статистиката:

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} sign(x_j - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} sign(R_j - R_k) \ , \qquad (21)$$

където

$$sign(x_j - x_i) = \begin{cases} 1 & x_i < x_j \\ 0 & x_i = x_j \\ -1 & x_i > x_j \end{cases} \qquad (22)$$

като R_i и R_j са ранговете на наблюденията x_i и x_j, съответно, от времевия ред.

Както се вижда, статистиката на теста зависи само от ранга на наблюденията, а не от реалните им значения. При трансформация на данните в някое разпределение, ранговете се запазват, т.е. този тест не се влияе от функцията на разпределение на данните.

При приемане, че данните са независими и идентично разпределени, то средното значение и стандартно отклонение на статистиката S, дадени от Kendall, са:

$$\begin{aligned} &E(S) = 0 \\ &\sigma(S) = n(n-1)(2n+5)/18 \end{aligned} \ , \qquad (23)$$

където **n** е броят на наблюденията. При наличие на свързани рангове (еднакви наблюдения), то отклонението се редуцира до:

$$\sigma^*(S) = \sigma(S) - \sum_{j=1}^{m} t_j (t_j - 1)(2t_j + 5)/18 \ , \qquad (24)$$

където ***m*** е броят на групите свързани рангове, всяка от които е с t_j свързани наблюдения. Kendall [6] показва, че разпределението на S клони към нормалното такова с нарастването на *n.*

Значимостта на тренда се тества чрез сравняване на стандартизираната променлива Z:

$$Z = \begin{cases} (S-1)/\sqrt{\sigma(S)} & S > 0 \\ 0 & S = 0 \\ (S+1)/\sqrt{\sigma(S)} & S < 0 \end{cases} \qquad (25)$$

със стандартната нормална променлива, като $Z(0{,}05)$ и $Z(0{,}01)$ са нормираните нормални отклонения от желаното ниво на значимост α, отчетена от статистическите таблици на нормалното разпределение([2], табл.II).

При тестовете за тренд, за нулева хипотеза H_0 се разглежда твърдението, че няма тренд в наблюдаваните данни, а за алтернативна хипотеза H_1 – наличието на намаляващ или растящ тренд. Съществуват два типа възможни грешки. Тип I - когато H_0 е некоректно отхвърлена, а Тип II - когато H_0 е приета, при вярна H_1. Тестове, при които грешката от Тип II е малко вероятна, се считат за силни.

Нивото на значимост α е важна за избягването на грешките от Тип I. Зависимостта на резултата от избраното ниво на значимост е дадена в табл.1:

Таблица 1

ниво на значимост α	р е з у л та т
$\alpha > 0{,}1$	Вероятно доказателство срещу H_0
$0{,}05 < \alpha < 0{,}1$	Слабо доказателство срещу H_0
$0{,}01 < \alpha < 0{,}05$	Силно доказателство срещу H_0
$0{,}01 > \alpha$	Много строго доказателство срещу H_0

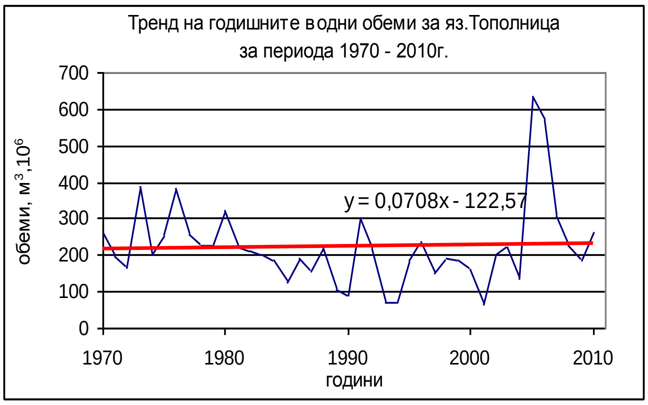
Т.е. в зависимост от абсолютната стойност на статистиката Z на теста :

Таблица 2

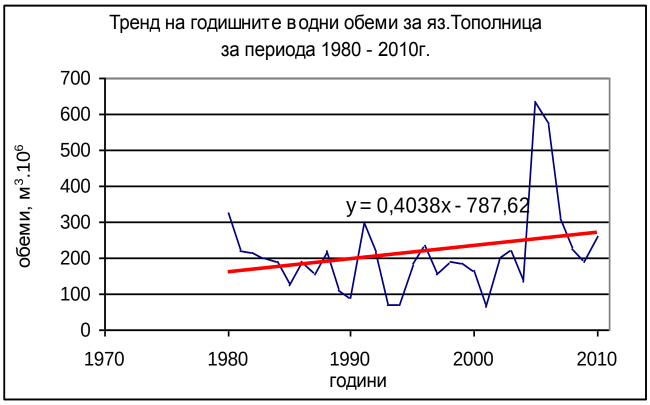
Статистика на теста Z	р е з у л та т
$\lvert Z\rvert < Z(0{,}1)$	Вероятно доказателство срещу H_0
$Z(0{,}1) < \lvert Z\rvert < Z(0{,}05)$	Слабо доказателство срещу H_0
$Z(0{,}05) < \lvert Z\rvert < Z(0{,}01)$	Силно доказателство срещу H_0
$Z(0{,}01) < \lvert Z\rvert$	Много строго доказателство срещу H_0

Знакът на Z определя дали трендът е нарастващ или намалявящ. Отрицателният означава намаляващ тренд, а положителният знак – нарастващ тренд.

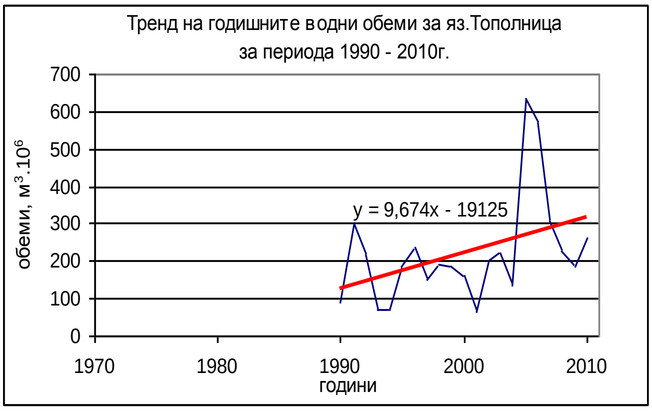
Експерименталните изследвания по определяне на тренда за водните обеми към яз.Тополница за три подпериода (1970-2010; 1980-2010 и 1990-2010) са извършени чрез линейна зависимост и трендът е показан графично на фиг.1, фиг.2 и фиг.3:



Фиг.1



Фиг.2



Фиг.3

Значимостта на изменението на трендовете, изследвана със статистическия Ман-Кедал(МК) тест, дава резултатите в табл.3.

Таблица 3

<table>
<tr><th rowspan="2">Mann-Kendall тест</th><th rowspan="2">Статистика на теста Z</th><th colspan="3">Ниво на значимост (Statistical table) α</th><th rowspan="2">Резултат</th></tr>
<tr><th>0,1</th><th>0,05</th><th>0,01</th></tr>
<tr><td>1970-2010</td><td>-1,089</td><td rowspan="3">1,645</td><td rowspan="3">1,96</td><td rowspan="3">2,58</td><td>слабо изразен тренд</td></tr>
<tr><td>1980-2010</td><td>0,578</td><td>слабо изразен тренд</td></tr>
<tr><td>1990-2010</td><td>1,721</td><td>статистически значим растящ тренд</td></tr>
</table>

Резултатите от изследването на тренда показват, че съществено изразен растящ тренд във водните обеми на годишния отток се наблюдава само за последните 2 десетилетия, което най-вероятно се дължи на климатичните промени, които са наблюдавани в този период.

2. Оценка на статистическите параметри на редицата

Съществуват редица методи за оценка на параметрите, като най-използваните са три:

- метод на моментите;
- метод на опорните квантили;
- метод на най-голямото правдоподобие.

Методът на моментите за оценка на параметрите на хидроложките редове и разпределенията дава достатъчно добри теоретични криви на апроксимация на разпределенията при сравнително голяма дължина на редовете. Получените оценки за статистическите параметри, обаче, не притежават статистическото качество ефективност, т.е. техните дисперсии не са минимални.

Преимуществото на метода на най-голямо правдоподобие е, че случайните грешки при оценката на параметрите, дължащи се на непълното съответствие на емпиричните вероятности на извадката с ограничен обем, се свеждат до минимум.

Доказано е, че за нормално разпределени величини оценките на параметрите по метода на моментите съвпадат с оценките на параметрите по метода на най-голямото правдоподобие.

Методът на опорните квантили дава възможност подобно на метода на най-голямото правдоподобие да се получат ефективни оценки, така че да се определи теоретично разпределение с минимални отклонения от емпиричното. За разлика, обаче от метода на най-голямо правдоподобие, този метод е субективен, защото е графо-аналитичен и изисква графично изравняване на емпиричните точки със загладената емпирична крива.

– Определяне на параметрите по метода на моментите

Първите два момента са:

- средно значение: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ (26)

- стандартно отклонение: $\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$ (27)

Освен това:

- коефициент на вариация $C_V = \frac{\sigma_X}{\bar{X}}$ (28)

- коефициент на асиметрия $C_S = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3}$ (29)

Статистически параметри на 41 годишната редица за яз.Тополница, оценени по метода на моментите по месеци, са дадени в табл.4:

Таблица 4

месец	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**год.**
$\bar{x}$	14,62	19,68	31,12	35,58	30,27	23,82	14,04	12,57	6,62	9,19	11,09	13,42	222,07
σ	11,36	13,82	26,40	24,75	18,46	17,78	13,20	32,33	7,20	8,21	11,79	9,32	113,31
Cv	0,777	0,702	0,848	0,695	0,610	0,747	0,940	2,572	1,087	0,894	1,063	0,695	0,510
Cs	2,58	1,34	3,41	1,90	2,25	1,32	1,48	5,78	4,40	3,31	3,48	1,84	1,91

– Определяне на параметрите по метода на опорните квантили

Начинът за изчисляване на статистическите параметри по този метод зависи от приетия теоретичен закон на разпределение.

Като едни от най-подходящите теоретични апроксимации на емпиричните криви на обезпечеността за речния отток на българските реки се препоръчват логнормалното трипараметрично разпределение и трипараметричното гама-разпределение на Крицкий и Менкель**.**

Трипараметрично логнормално разпределение

От емпиричната крива се определят опорните квантили x_5, x_{50} и x_{95} и чрез тях се изчислява коефициента на скосеност, която характеризира несиметричността на кривата на разпределение:

$$S = \frac{x_5 + x_{95} - 2.x_{50}}{x_5 - x_{95}} \qquad (30)$$

Г.А.Алексеев [4] е изготвил таблица, от която се отчитат коефициента на асиметрия C_S и отклоненията ψ на ординатите на кривата на обезпеченост от средната стойност, т.е.:

$$\psi_P = \frac{x_P - \bar{x}}{\sigma_X} \tag{31}$$

Първите два момента са:

- стандартно отклонение: $\sigma_x = (x_5 - x_{95})/(\psi_5 - \psi_{95})$ (32)
- средно значение: $\bar{x} = x_{50} - \sigma_x.\psi_{50}$ (33)

Освен тях:

- коефициент на вариация $C_V = \frac{\sigma_X}{\bar{x}}$ (34)

Трипараметрично гама-разпределение

В този случай, от емпиричната крива се определят опорните квантили x_5, x_{50} и x95 и чрез тях коефициентът на скосеност се изчислява чрез:

$$S = \frac{2.\ln x_{50} - \ln x_5 - \ln x_{95}}{x_5 - \ln x_{95}} \tag{35}$$

Аналогично на предното разпределение – от таблица, изготвена от Алексеев, се взима съответния коефициент на асиметрия за редицата $Z_P = (X_P)^\alpha$ или се изчислява по израза:

$$C_{SZ} = 7{,}15.S \tag{36}$$

където Z_P е степенна преобразуваща функция с разпределение Пирсон III тип при $C_{SZ} = 2.C_{VZ}$.

От таблицата за това разпределение се отчитат модулните коефициенти $K_P = Z_P / \bar{Z}$ и с тях се определя: $\alpha = \frac{\ln K_5 - \ln K_{95}}{\ln X_5 - \ln X_{95}}$ (37)

Накрая, за средното значение е в сила:

$$\ln \bar{Z} = \alpha.\ln X_{50} - \ln K_{50} \tag{38}$$

– Определяне на параметрите по метода на най-голямото правдоподобие

Тук начинът за изчисляване на статистическите параметри по този метод също зависи от приетия теоретичен закон на разпределение.

За трипараметрично логнормално разпределение

Поради наличие на високата асиметрия то е подходящо за описание на годишния отток с висока изменчивост. Вероятностната плътност е :

$$f(x; x_0, \sigma, x_u) = \frac{1}{(x - x_u)\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\ln\left[(x - x_u) - x_0\right]^2\right) \tag{39}$$

където трите параметъра се определят по следния начин:

$$x_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i - x_u) \qquad (40)$$

е средното значение, където N е броят на наблюдаваните значения,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\ln(x_i - x_u) - x_0\right]^2 \qquad (41)$$

е дисперсията на трансформираните величини.

Оценката на параметъра x_u се получава по метода на най-малкото правдоподобие въз основа на следното уравнение:

$$\sum_{1}^{N}\frac{1}{x_i - x_u}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln^2(x_i - x_u) - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i - x_u)\right]^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i - x_u)\right\} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\ln(x_i - x_u)}{x_i - x_u} = 0 \qquad (42)$$

Решаването на това нелинейно уравнение е свързано с големи трудности от изчислителен характер. Друга възможност е използване на метод при който се търси максимум на функцията на правдоподобие. Това се постига по итерационен път. Третият и често прилаган начин е като се задават 20 стойности на $x_u \in [0; x_{\min} - \varepsilon]$, където $x_{\min}$ е минималният отток в наличния ред, а $0 < \varepsilon << 1$. По този начин това разпределение участва с 20 различни реализации.

За трипараметрично гама-разпределение

Разпределението притежава голяма гъвкавост и може да описва оттока при различни условия. То има плътност на вероятностите:

$$f(x; x_{0\gamma}, \gamma, b) = \frac{1}{\Gamma(\gamma).|b|.x_{0\gamma}}\left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\frac{\gamma}{b}}\left[\frac{x}{x_{0\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{b}-1}.\exp\left\{-\left[\frac{x}{x_{0\gamma}}.\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\frac{1}{b}}\right\} \qquad (43)$$

където $x_{0\gamma}$, γ, b са параметри на разпределението, които са свързани с коефициентите на вариация и на асиметрия чрез следните зависимости:

$$c_V = \left[\frac{\Gamma(\gamma).\Gamma(\gamma+2.b)}{\Gamma^2(\gamma+b)} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (44)$$

$$c_S = \frac{1}{c_V^3}\left[\frac{\Gamma^2(\gamma).\Gamma(\gamma+3.b)}{\Gamma^3(\gamma+b)} - 3.\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2.b)}{\Gamma^2(\gamma+b)} + 2\right] \qquad (45)$$

където:
$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty}\exp(-t).t^{\gamma-1}dt \qquad (46)$$

е Гама функцията.

При b=1 това разпределение преминава в двупараметрично гама-разпределение.

Определянето на оценките на параметрите $x_{0\gamma}$, γ, b по метода на най-голямо правдоподобие се извършва чрез решаването на следната система уравнения, получена при диференцирането на функцията на правдоподобието по всеки от параметрите:

$$\Phi(b) = \frac{\lambda_2}{b} + \ln\frac{b}{\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2} - \frac{\partial \ln\Gamma(\gamma)}{\partial\gamma} = 0 \qquad (47)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_1.b}{\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2} \qquad (48)$$

$$x_{0\gamma} = \bar{x}.\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2}{b}\right)^b.\left(\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right) \qquad (49)$$

където $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i$, $\lambda_1 = \frac{1}{N}\sum_1^N\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right)^{\frac{1}{b}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{N}\sum_1^N \ln\frac{x_i}{\bar{x}}$,

$$\lambda_3 = \frac{1}{N}\sum_1^N\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right)^{\frac{1}{b}}.\ln\frac{x_i}{\bar{x}} \qquad (50)$$

3. Построяване на емпиричната и теоретичната крива на обезпечеността на годишния приток

Изборът на най-подходяща функция на разпределение на вероятностите, описваща колебанията на оттока в генералната съвкупност е една от най-отговорните задачи на хидроложките изследвания. От правилния избор на функцията зависи адекватността на математическото моделиране и прогнозиране на речния отток.

За описание на оттока се използват само онези теоретични функции на разпределение, които най-добре отразяват закономерностите на връзката между оттока и неговата повторяемост.

– Емпирична крива на обезпечеността

Стойностите на емпиричната крива се получават като членовете на редицата се подреждат в низходящ ред и на всеки член се присвоява обезпеченост P, изчислена по формулата на Алексеев:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{m} - 0{,}25}{\mathrm{n} + 0{,}50}.100\,\%\,, \qquad (51)$$

където **m** е поредният номер на члена в редицата, а **n** е общата дължина на редицата.

– Теоретични криви на обезпечеността

Трипараметрично логнормално разпределение

Обезпеченостите на изходните значения за оттока се определят чрез интегриране на плътността на вероятностите:

$$P(x_i) = \int_{x_i}^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_{0}^{x_i} f(t)dt \qquad (52)$$

където плътността е:

$$f(x; x_0, \sigma, x_u) = \frac{1}{(x - x_u)\sqrt{2\pi\sigma^2}} . \exp\left(- \frac{1}{2\sigma^2} \ln\left[(x - x_u) - x_0\right]^2 \right)$$

Трипараметрично гама-разпределение

Аналогично, обезпеченостите на наблюдаваните значения за оттока се определят чрез интегриране на плътността на вероятностите:

$$P(x_i) = \int_{x_i}^{\infty} f(t)dt$$

където:

$$f(t; t_{0\gamma}, \gamma, b) = \frac{1}{\Gamma(\gamma).|b|.t_{0\gamma}} \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\frac{\gamma}{b}} \left[\frac{t}{t_{0\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{b}-1} . \exp\left\{ - \left[\frac{t}{t_{0\gamma}} . \frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\frac{1}{b}} \right\}$$

За целта се извършва следното полагане:

$$t = x_{0\gamma} . \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + b_0)} . u^b \text{ като } \quad dt = b_0 . u^{b_0 - 1} . \frac{x_{0\gamma}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + b)} \qquad (53)$$

и се получава

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma).|b|} . u^{\gamma} . \frac{1}{x} \exp(-u) \quad , \qquad (54)$$

т.е. :

$$P(x_i) = 1 - I(0, \alpha) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{0}^{\alpha(x)} u^{\lambda - 1} . \exp(-u)\, du \text{ , при } b = b_0 > 0 \qquad (55)$$

и

$$P(x_i) = I(0, \alpha) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{0}^{\alpha(x)} u^{\lambda - 1} . \exp(-u)\, du \text{ , при } b = b_0 < 0 \qquad (56)$$

където

$$\alpha(x) = \left[\frac{x}{x_{0\gamma}} . \frac{\Gamma(\gamma + b_0)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\frac{1}{b}} \qquad (57)$$

Интегралът $I(0, \alpha)$ се представя като сума от други два интеграла

$$I(0, \alpha) = I(0,1) + I(1, \alpha) \qquad (58)$$

първият интеграл се решава чрез разлагане на функцията $\exp(-u)$ в ред

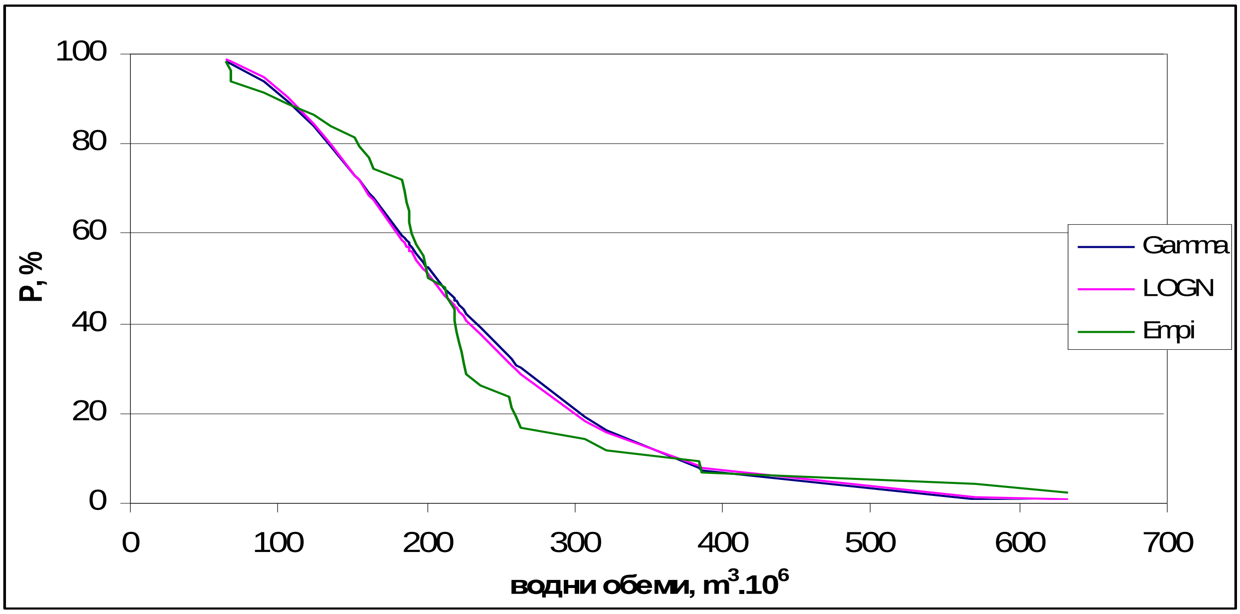
$$I(0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{\varepsilon}{(\gamma + 1)} + \frac{\varepsilon^2}{(\gamma + 2).2!} - \ldots - \frac{\varepsilon^{2k-1}}{(\gamma + 2.k - 1)(2.k - 1)!} + \frac{\varepsilon^{2.k}}{(\gamma + 2.k)(2.k)!} \right] \qquad (59)$$

където $0<\varepsilon<<1$.

Вторият интеграл $I(1,\alpha)$ се решава със стандартна програма за числено интегриране.

Емпиричната и трите теоретични криви на обезпеченостите, апроксимирани с гама-трипараметричното и логнормалното трипараметрично разпределение са дадени в таблица 5 и на фиг.1:

Теоретични криви на обезпечеността за апроксимация
на годишните водни обеми при яз.Тополница, 1970-2010г.



Фиг. IV.1. 1

Таблица 5:

Криви на обезпеченостите на годишните водни обеми при яз.Тополница
(за редицата 1970-2010 г.)

N	обеми м³10⁶	GAMMA %	LOGN %	EMPI %
1	634,69	0,2	0,4	1,8
2	571,25	0,5	0,9	4,2
3	387,64	7,2	7,5	6,6
4	384,76	7,5	7,8	9,0
5	323,14	15,8	15,4	11,4
6	307,86	18,8	18,1	13,9
7	264,75	29,7	28,4	16,3
8	262,00	30,5	29,2	18,7
9	258,47	31,6	30,2	21,1
10	256,97	32,1	30,7	23,5
11	237,19	38,6	37,1	25,9
12	228,57	41,7	40,2	28,3
13	225,65	42,8	41,3	30,7
14	224,48	43,3	41,7	33,1

15	223,50	43,6	42,1	35,5
16	220,82	44,7	43,1	38,0
17	220,37	44,8	43,3	40,4
18	219,23	45,3	43,7	42,8
19	215,25	46,8	45,3	45,2
20	213,51	47,5	46,0	47,6
21	202,04	52,1	50,7	50,0
22	201,31	52,4	51,0	52,4
23	199,22	53,2	51,9	54,8
24	194,87	55,0	53,8	57,2
25	190,72	56,8	55,6	59,6
26	190,11	57,0	55,9	62,0
27	188,69	57,6	56,5	64,5
28	187,78	58,0	56,9	66,9
29	186,28	58,6	57,5	69,3
30	184,86	59,2	58,2	71,7
31	164,84	67,7	67,2	74,1
32	162,66	68,7	68,2	76,5
33	155,02	71,8	71,6	78,9
34	153,12	72,6	72,4	81,3
35	136,70	79,2	79,5	83,7
36	124,64	83,6	84,3	86,1
37	107,74	89,1	90,0	88,6
38	91,30	93,4	94,4	91,0
39	68,52	97,4	98,1	93,4
40	68,25	97,5	98,1	95,8
41	66,23	97,8	98,4	98,2

– Избор на най-подходяща функция на разпределение

Изборът на най-подходящата функция включва редица проверки чрез критерии за установяване на съответствието на приетия тип разпределение с емпиричното разпределение на наблюдаваните данни. Най-прилаганите критерии са следните два:

a. Критерий на Колмогоров

Ако $D_n = \max|F_n(x) - F(x)|$ е максималната разлика между значенията на емпиричната функция на разпределение $F_n(x)$ и теоретичната $F(x)$ функция, то се изисква вероятността неравенството $D_n < \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$ да е изпълнено при произволни λ и $n \to \infty$ да е приблизително равна на $K(\lambda) = 1 - 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}.e^{-2\nu^2\lambda^2}$,

т.е.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{D_n\sqrt{n} \le \lambda\right\} \approx K(\lambda) \qquad (60)$$

като стойностите на функцията $1 - K(\lambda) = P\{D_n \sqrt{n} > \lambda\}$ са дадени в таблица 6 [3].

Критерий на Колмогоров. Значения на $1 - K(\lambda)$ Таблица 6

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	99999	99998	99995	99991	99983	99970	99949	99917	99872	99807
0,4	99719	99603	99452	99262	99027	98741	98400	97998	97532	96998
0,5	96394	95719	94969	94147	93250	92282	91242	90134	88960	87724
0,6	86428	85077	83678	82225	80732	79201	77636	76042	74422	72781
0,7	71124	69453	67774	66089	64402	62717	61036	59363	57700	56050
0,8	54414	52796	51197	49619	48063	46532	45026	43545	42093	40668
0,9	39273	37907	36571	35266	33992	32748	31536	30356	29206	28087
1,0	27000	25943	24917	23922	22957	22021	21114	20236	19387	18566
1,1	17772	17005	16264	15550	14861	14196	13556	12939	12345	11774
1,2	11225	10697	10190	09703	09235	08787	08357	07944	07550	07171
1,3	06809	06463	06132	05815	05513	05224	04949	04686	04435	04196
1,4	03968	03751	03545	03348	03162	02984	02815	02655	02503	02359
1,5	02222	02092	01969	01852	01742	01638	01539	01446	01357	01274
1,6	01195	01121	01051	00985	00922	00864	00808	00756	00707	00661
1,7	00618	00577	00539	00503	00469	00438	00408	00380	00354	00330
1,8	00307	00285	00265	00247	00229	00213	00198	00186	00170	00158
1,9	00146	00136	00126	00116	00108	00100	00092	00085	00079	00073
2,0	00067	00062	00057	00053	00048	00045	00041	00038	00035	00032
2,1	00030	00027	00025	00023	00021	00019	00018	00016	00015	00014
2,2	00013	00011	00010	00010	00009	00008	00007	00007	00006	00006
2,3	00005	00005	00004	00004	00004	00003	00003	00003	00002	00002
2,4	00002	00002	00002	00001	00001	00001	00001	00001	00001	00001

Вероятността $P_n(\lambda)$ изразява степента на съвпадение на емпиричните данни с приетата теоретична крива на разпределение, т.е. колкото $P_n(\lambda)$ има по-висока стойност – толкова има по-добро съвпадение между тях. Този критерий е изведен при предпоставката за голям брой наблюдения. Затова при къси редици той не винаги дава достатъчно строги изводи.

b. $n\omega^2$ - критерий

При този критерий като показател за съвпадение се използва квадрата на средното отклонение на значенията на емпиричната крива $P(x_k)$ от значенията на теоретичната крива P_k за всички значения на аргумента [1]:

$$n\omega^2 = \frac{1}{12.n} + \sum_{1}^{n} [P(x_k) - P_k] \tag{61}$$

където:

k е пореден номер на наблюдението при подредена в низходящ ред редица;

$P(x_k)$ е обезпечеността, отчетена от теоретичната крива на разпределение за x_k

$P_k = \frac{2.k-1}{2.n}$ е емпиричната обезпеченост за x_k .

Този критерий дава строги резултати при $n > 20$ броя наблюдения. Избира се този вариант на теоретична крива, при който $n\omega^2$ има минимална стойност.

Двата статистически теста са приложени за избор на най-подходяща теоретична функция за месечните и годишните редици от значения за водния обем W [м^3.10^6] при яз.Тополница. Резултатите са дадени в табл.7.

Таблица 7

месец	Тип на функцията	Критерий на Колмогоров	Критерий $n\omega^2$	Избрана теоретична крива
1.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,820 0,993	0,025 0,035	LOGNORMAL
2.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,999 0,975	0,038 0,031	GAMMA-3
3.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,963 0,856	0,056 0,045	GAMMA-3
4.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,985 0,779	0,056 0,066	GAMMA-3
5.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,972 0,998	0,019 0,017	LOGNORMAL
6.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,903 0,921	0,038 0,038	LOGNORMAL
7.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,738 0,985	0,038 0,023	LOGNORMAL

8.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,690 0,961	0,089 0,035	LOGNORMAL
9.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,450 0,942	0,043 0,049	LOGNORMAL
10.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,240 0,315	0,151 0,200	LOGNORMAL
11.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,018 0,126	0,130 0,236	LOGNORMAL
12.	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,631 0,916	0,019 0,036	LOGNORMAL
годишни	GAMMA-3 LOGNORMAL	0,329 0,310	0,204 0,223	GAMMA-3

Анализът на таблицата показва, че по-подходящо за описание на колебанията на водните обеми е логнормалното трипараметрично разпределение.

Получените по-важни обезпечености за месечните и годишните водни обеми, отчетени по избраните теоретични разпределения са дадени в Табл.8:

Таблица 8

обезп.	месеци, W [м^3.10^6]												год.
P %	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	49,53	69,95	124,96	144,06	88,17	92,13	57,20	87,06	25,33	29,44	29,46	42,23	527,49
0,1	71,32	100,8	185,15	216,79	121,15	134,85	85,22	240,20	43,11	46,26	57,10	65,19	676,41
0,01	93,01	131,5	245,44	290,11	153,43	177,26	113,30	556,42	66,77	67,11	110,39	93,18	816,27

4. Генериране на синтетични редици на месечния приток

Извършените изследвания по оценката на представителността на разглежданите хидроложки редици, предшестващи определянето на параметрите на оттока и избора на най-подходящата теоретична функция на разпределение на вероятностите, създават необходимата основа за осъществяване на имитационно математическо моделиране. Необходимостта от него се обуславя от недостатъчната дължина на наличните хидроложки редици, които не могат да възпроизведат вероятностните процеси в тяхната генерална съвкупност.

Чрез математическо моделиране могат да бъдат генерирани дълги изкуствени хидроложки редици, които по отношение на функциите на разпределение и на статистическите характеристики да имат значения близки до тези на изходните, но по отношение на редуването на многоводни и маловодни групировки и на представянето на кривите на обезпеченост в екстремните им участъци (за високите и ниските значения), да съдържат много по-богата информация.

Освен това, моделираните хидроложки редици могат да опишат голямото разнообразие в съчетанието на различни водни количества.

Като правило, чрез математическото моделиране се запазват основните закономерности, характерни за вероятностния процес, но се представя много по-богата информация за голямото разнообразие от последователности на повече съчетания от много водни или сухи периоди, която информация не се съдържа в изходните редици.

В настоящата разработка се използва модел, основан на:

а) Генериране на годишните значения с помощта на регресионен модел по метода на последователното определяне на линейната авторегресия (ПОЛАР) [3];

б) Генериране във вътрешногодишен разрез на фрагменти от месечите обеми по метода на фрагментите [3].

Тази декомпозиция на моделирането, извършвано в два етапа, дава възможност за адекватно възпроизвеждане на основните стохастически закономерности, както на годишния водни обеми, така и фрагменти от месечните обеми на притока.

4.1. Метод на последователното определяне на линейната авторегресия (ПОЛАР)

Линейните регресионни модели са едни от най-разпространените за генериране на изкуствени хидроложки редици. Те се използват широко при описанието на стационарни ергодични марковски процеси.

В случаите, когато стохастичният процес има нормално разпределение, оценката на регресионните коефициенти по метода на моментите и на най-голямото правдоподобие съвпадат. Тъй като вероятностния характер на оттока се описва с асиметрични функции на разпределение, то е необходимо нормализирането на изходните редици преди използването на линейни регресионни модели.

Моделирането на изкуствените годишни значения на оттока се извършва със следното уравнение, предложено от Г.Сванидзе за групово моделиране:

$$W_{t,p} = a_{p,1}^{i} W_{t,p-1} + a_{p,2}^{i} W_{t,p-2} + \cdots + a_{p,i}^{i} W_{t,p-i} + a_{p,i}^{i} W_{t,p-i} + \cdots + a_{p,i}^{i} W_{t,p-1} + \sigma_{p}^{i} . \varepsilon_{t,p} \qquad (62)$$

където:

$a_{p,i}^{i}$ - регресионен коефициент за *p*-тия пункт;

$W_{t,p-i}$ - представлява реализацията на процеса за година i и пункт *p*;

σ_{p}^{i} - остатъчна дисперсия при дадената дълбочина

$\varepsilon_{t,p}$ - случайна, независима и нормално разпределена величина;

i - е дълбочината на отчитаната връзка и $i = k.p + p - 1$;

k - брой на годините.

Като условие за определяне на дължината на корелационната връзка е използван критерия на Акайк.

Процесът на моделирането на 41 годишните значения води в резултат до получаване на 10000 годишна редица.

4.2. Метод на фрагментите

Същността на метода на фрагментите се състои в извършването на два последователни случайни избора при моделирането на месечните значения: първи – избор на годишни значения, втори – на фрагмент от месечни значения. Под фрагмент се разбира годишният хидрограф за оттока, който е нормиран спрямо неговото годишно значение.

Този метод се основава на каноническото разлагане на случайни функции, според което всяка такава функция може да се представи като линейна комбинация на случайна величина и произволна детерминирана функция.

При моделирането на вътрешногодишните значения се взема под внимание корелационната връзка между водността на годината, изразена с обезпечеността на годишното значение на оттока и неговото вътрешногодишно разпределение. За целта, от наличните фрагменти се изчисляват коефициентите на вътрешногодишната неравномерност на оттока:

$$d_i = \sum_{1}^{12} (1 - k_{ij}) \qquad (63)$$

където:

$$k_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i / 12}$$

x_{ij} - месечно значение $j = 1 \div 12$;

x_i - годишно значение $i = 1 \div 38$;

След това се изчислява корелационният коефициент r_{dp} между коефициентите d_i и съответните им обезпечености на годишния отток $P(x_i)$. Статистическата значимост на тази връзка се оценява чрез коефициент на достоверност:

$$k_{Ä} = \frac{|r_{dp}|}{\sigma_r} \qquad (64)$$

където:

$$\sigma_r = \frac{1 - r_{dp}^2}{n - 1} \qquad (65)$$

Ако $k_{Ä} < 2$, то връзката е статически незначима. Тогава за втория случаен избор всички фрагменти се поместват в една “урна” и избирането на един от тях е осъществява посредством генератор за равномерно разпределени случайни числа.

Ако $2 \le k_{Ä}$, то корелационната връзка е статически значима с доверителна вероятност от 95%. Тогава за втория случаен избор всички фрагменти се поместват в 5 “урни” със следните интервали на обезпеченост: 0-20%, 20-40%, 40-60%, 60-80%, 80-100%. Във всяка “урна” се поставят фрагментите F_i^P за годините, за които обезпечеността на годишното значение принадлежи към съответния интервал. Избирането на един от тях е осъществява отново посредством генератор за равномерно разпределени случайни числа от "урната" за съответната година.

Моделираните вътрешногодишни значения се получават накрая от следното уравнение:

$$x_{i,j}^P = x_i^P . F_{i,j}^P \quad \text{като:} \quad i = 1 \div 38 \ \text{ и } \ j = 1 \div 12 \qquad (66)$$

Качеството на моделираните редици се определя въз основа на сравняването на статистическите характеристики на изкуствените с наблюдаваните редици.

Основните характеристики, които се сравняват са средното значение $\overline{W}$, коефициента на вариация C_V и коефициента на асиметрия C_S. Освен това се сравняват и емпиричните функции на разпределение на моделираните и изходните редици с помощта на критериите на Колмогоров и $n\omega^2$.

Извършено е генериране на изкуствена 500 годишна редица на месечните водни обеми за яз.Тополница по метода на последователното определяне на линейната авторегресия и на вътрешно годишното им разпределение – метода на фрагментите.

Резултатите от изчисленията на статистическите параметрите на моделираните данни са дадени в табл.9:

Таблица 9

месец	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**год.**
$\overline{W}$	14,57	20,06	27,84	34,51	32,27	23,59	13,41	12,88	6,73	9,47	13,45	14,15	223,0
σ_W	8,68	13,59	19,82	23,85	25,60	19,03	12,24	26,11	6,23	8,02	17,11	11,28	114,47
C_V	0,595	0,677	0,712	0,691	0,793	0,806	0,913	2,026	0,925	0,847	1,271	0,797	0,513
C_S	1,53	1,22	1,99	2,01	3,44	2,18	1,93	6,57	4,55	3,68	3,84	3,22	2,47

Вижда се, че моделираните редици имат много добро приближение по отношение на статистическите си параметри с наблюдаваните редици, т.е. те са представителни.

Доброто приближение на функциите на разпределение на моделираните редици с емпиричната крива на наблюдаваните редици е отразено и чрез тестовете за приближението им – критериите **n-ω^2** и на Колмогоров. Резултатите от тях са в следващата таблица 7. Колкото **n-ω^2** е по-близо до нулата и статистиката на Колмогоров е по-близо до единицата, толкова съвпадението на кривите е по-добро.

Таблица 7

месец	**Колмогоров**	**n-ω^2**
1	0,880	0,088
2	0,963	0,035
3	0,510	0,136
4	0,839	0,057
5	1,000	0,022
6	0,998	0,028
7	0,981	0,037
8	0,994	0,042

9	0,976	0,066
10	0,994	0,045
11	0,729	0,114
12	0,970	0,056
годишни	0,283	0,224

Вижда се, че и двата критерия отчитат задоволително приближение на наблюдаваните редици с изкуствените такива, което дава възможност последните да бъдат използвани успешно при различни водностопански изследвания вместо късите редици от 41 години като по този начин да се получат по-устойчиви резултати.

По-важни обезпечености на моделираните данни са дадени в табл.10:

Таблица 10

обезп. P %	месеци, W [м^3.10^6]												год.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	46,427	79,007	107,543	134,57	99,385	102,272	68,2381	78,3278	29,6452	31,71	50,40	47,43	531,98
0,1	71,508	133,235	180,173	225,619	151,328	180,859	131,166	286,855	72,1214	50,54	87,47	75,38	682,91
0,01	102,04	204,847	275,528	345,233	213,634	289,054	224,638	786,074	174,909	74,18	137,73	110,38	824,75

Литература

1. Николова, Н.К., Хидроложки основи на водностопанските изследвания,Изд.БАН, 1979.
2. Смирнов, Н.В. и И.В.Дунин-Барковский, Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, М., Наука, 1963.
3. Сванидзе,Г.Г., Моделирования гидрологических рядов с учетом внутригодового распределения стока, АН ГССР, 1963.
4. Алексеев,Г.А., Графоаналитические способы определения и приведения к длительному периоду наблюдений параметров кривых распределения, ТР ГГИ, вып.73, 1960.
5. Hamed, K. H., Trend detection in hydrologic data: The Mann–Kendall trend test under the scaling hypothesis, Journal of Hydrology,349, (2008).
6. Kendall, M.G., Rank Correlation Methods. Griffin, London,1975